



TITLE:

Initial boundary value problem for the equations of ideal magneto-hydrodynamics (Non linear evolution equation and its applications)

AUTHOR(S):

山本, 吉孝

CITATION:

山本, 吉孝. Initial boundary value problem for the equations of ideal magneto-hydrodynamics (Non linear evolution equation and its applications). 数理解析研究所講究録 2000, 1135: 77-84

ISSUE DATE:

2000-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63764>

RIGHT:

Initial boundary value problem for the equations of ideal magneto-hydrodynamics

BY

YOSHITAKA YAMAMOTO (山本 吉孝)

Department of Applied Physics, Faculty of Engineering, Osaka University

1. Introduction. 導電率がきわめて大きな非粘性流体の運動は, 理想磁気流体力学 (ideal MHD) で記述される. 流体が完全導体壁で囲まれた有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を充たしているとすれば, 理想磁気流体方程式の初期値境界値問題は,

$$\left. \begin{aligned} \rho'(p)(\partial_t + u \cdot \nabla)p + \rho(p)\nabla \cdot u &= 0, \\ \rho(p)(\partial_t + u \cdot \nabla)u + \nabla p &= \mu_0(\nabla \times H) \times H, \\ \partial_t H &= \nabla \times (u \times H), \\ \nabla \cdot H &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{in } [0, T] \times \Omega, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u \cdot n &= 0, \\ H \cdot n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{on } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (2)$$

$$(p, u, H)|_{t=0} = (p_0, u_0, H_0) \quad \text{on } \Omega, \quad (3)$$

で与えられる. ここに, 圧力 p , 流速 $u = (u_1, u_2, u_3)$, および磁場 $H = (H_1, H_2, H_3)$ は時間変数 t と空間変数 $x = (x_1, x_2, x_3)$ の未知関数であり, 密度 $\rho = \rho(p)$ は圧力 $p > 0$ の滑らかな関数で, $\rho(p) > 0$, $\rho'(p) > 0$ を満たすものとする. 透磁率 μ_0 は正の定数であるとする. 境界 $\partial\Omega$ は滑らかであると仮定して, $n = n(x)$ で点 $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルを表すことにする. T は正の定数である.

本講演では, 境界付近で適当な重みをつけて関数の滑らかさをはかって定義される Sobolev 空間 (以下, 重みつき Sobolev 空間と略記する) を用いて, 初期値境界値問題 (1)-(3) の時間局所解の一意存在について得られた結果を紹介する. 先行の研究としては, Yanagisawa-Matsumura [8] と Secchi [6] がある. いずれも, 本講演と同様の重みつき Sobolev 空間を用いて時間局所解の存在を論じているが, 境界条件 (2) から生じるデータの整合性の取り扱いに急所が見受けられる. 後述するように, 解の滑らかさと比較して必要以上の滑らかさをデータに課すことで整合性に関わる困難を回避しているようである.

一般に, 初期値境界値問題の滑らかな解の存在を論ずるさい, 整合条件の記述が煩雑になるのはやむを得ないことだが, 技術的問題を理由にデータに課す条件を不要に強めたり曖昧に表現することは避けたい. 重みつき Sobolev 空間で (1)-(3) が可解であるための必要十分条件を初期デー

タの滑らかさと境界値 (もしくは境界付近での関数の挙動) で明確に記述し, 解の接続問題などを考えていくうえで有効な形で局所可解性を示したい. これが本講演の目的である.

2. Formulation. Yanagisawa-Matsumura [8] にしたがって, (1)-(3) から拘束条件を分離し, 数学的に初期値境界値問題を定式化する. $\alpha = \rho_p/\rho$ とおく. はじめに, p, u, H を (1)-(3) の (必要なだけ滑らかな) 解としよう. 一般に,

$$\begin{aligned}(\nabla \times H) \times H &= (H \cdot \nabla)H - 1/2 \nabla |H|^2, \\ \nabla \times (u \times H) &= (H \cdot \nabla)u - H(\nabla \cdot u) + u(\nabla \cdot H) - (u \cdot \nabla)H\end{aligned}$$

であるから (1)-(3) から方程式

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned}\alpha \partial_t p + \alpha(u \cdot \nabla)p + \nabla \cdot u &= 0, \\ \rho \partial_t u + \nabla p + \rho(u \cdot \nabla)u + \mu_0/2 \nabla |H|^2 - \mu_0(H \cdot \nabla)H &= 0, \\ \mu_0 \partial_t H + \mu_0 H(\nabla \cdot u) - \mu_0(H \cdot \nabla)u + \mu_0(u \cdot \nabla)H &= 0,\end{aligned}\right\} \text{ in } [0, T] \times \Omega, \quad (4) \\ u \cdot n = 0, & \text{ on } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (5) \\ (p, u, H)|_{t=0} = (p_0, u_0, H_0) & \text{ on } \Omega, \quad (6)\end{aligned}$$

と初期データに関する条件

$$\nabla \cdot H_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (7)$$

$$H_0 \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (8)$$

が導き出される. 今度は, p, u, H を (4)-(6) の解としよう. 境界 $\partial\Omega$ で外向き単位法線ベクトル n と一致する C^∞ ベクトル場 ν にたいして, (4) の第3式と (5) から,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla \cdot H)^2 dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot H)^2 dx &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} (H \cdot n)^2 dS + \int_{\partial\Omega} \{\nabla \cdot u - 2(\nu \cdot \nabla)(u \cdot \nu)|_{\partial\Omega}\} (H \cdot n)^2 dS &= 0\end{aligned}$$

が導き出される. したがって, Gronwall の補題により, (7) から (1) の第4式が, (8) から (2) の第2式が, それぞれ導き出される. 以上により, (1)-(3) は (4)-(6) に初期値の拘束条件 (7), (8) を課したものと同値である.

今後, 拘束条件 (8) のもとで初期値境界値問題 (4)-(6) を考えることにする. 以下の議論では, 拘束条件 (7) を使わないのでこれを省く.

3. Linearized problem. \mathbf{R}^7 値未知関数 $U = {}^t(p, u, H)$ を導入すれば, 初期値境界値問

題 (4)-(6) は,

$$\left. \begin{aligned} A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^3 A_j(U)\partial_j U &= 0 && \text{in } [0, T] \times \Omega, \\ u \cdot n &= 0 && \text{on } [0, T] \times \partial\Omega, \\ U|_{t=0} = U_0 &= {}^t(p_0, u_0, H_0) && \text{on } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と表される. ここに, $A_j(\cdot)$, $j = 0, 1, 2, 3$, は $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ で定義され, 7×7 実対称行列の値をとる C^∞ 関数, $A_0(W)$, $W \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, は正定値行列である. さらに, $W = {}^t(r, w, J) \in \mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ と $\xi \in S^2$ について, $w \cdot \xi = J \cdot \xi = 0$ が成り立てば,

$$A_\xi(W) \equiv \xi_1 A_1(W) + \xi_2 A_2(W) + \xi_3 A_3(W)$$

で定義される 7×7 実対称行列は, つぎの (a)-(c) を満たす:

- (a) $\ker A_\xi(W) = \{{}^t(p, u, H); p = 0, u \cdot \xi = 0\}$;
- (b) $A_\xi(W)$ の固有値は, ± 1 (重複度 1), 0 (重複度 5);
- (c) $U = {}^t(p, u, H)$ が $u \cdot \xi = 0$ を満たせば, ${}^t U A_\xi(W) U = 0$.

(b), (c) により, \mathbf{R}^7 の部分空間 $\{{}^t(p, u, H); u \cdot \xi = 0\}$ は $A_\xi(W)$ にたいする極大非負部分空間である. このことから, $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ 値の滑らかな関数 $\bar{V} = {}^t(\bar{q}, \bar{v}, \bar{I})$ で準線形問題 (9) を線形化して得られる未知関数 $V = {}^t(q, v, I)$ の方程式

$$\left. \begin{aligned} A_0(\bar{V})\partial_t V + \sum_{j=1}^3 A_j(\bar{V})\partial_j V + B(\bar{V})V &= 0 && \text{in } [0, T] \times \Omega, \\ v \cdot n &= 0 && \text{on } [0, T] \times \partial\Omega, \\ V|_{t=0} = U_0 &= {}^t(p_0, u_0, H_0) && \text{on } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

は, 関数 \bar{V} が条件

$$\bar{v} \cdot n = \bar{I} \cdot n = 0 \quad \text{on } [0, T] \times \partial\Omega \quad (11)$$

を満たすとき, 境界上で階数一定の境界行列をもつ一階対称双曲型方程式系の極大非負境界条件問題となる. この線形問題の強解 (strong solution) の一意存在についての研究は, Lax-Phillips [2] に始まり, Rauch [4] によって確立された. 強解の滑らかさに関しては Rauch 自身によって接線微分の L^2 の意味での正則性が示された. その後の研究で, 法線微分の滑らかさが加味された重みつき Sobolev 空間を用いていくつかの結果が得られている ([3], [7], [10]). 本講演の結果は, 補間空間論を援用して重みつき Sobolev 空間における強解の評価を精密化し, その結果を非線形問題 (9) に応用して得られたものである.

方程式 (10) 第 1 式の左辺に低階項 $B(\bar{V})V$ を付加されているが, その意義を説明しておく. 低階項の有無は線形化方程式の強解の一意存在や正則性に影響しない. ところが, 低階項の付加が

ない場合、初期値に条件 (8) を課しても、線形化方程式の解 V について (境界条件 $v \cdot n = 0$ が成り立つのは当然であるが) 境界上で $I \cdot n = 0$ は必ずしも成り立たない。もはや、(8) に拘束条件の性格はないのである。これでは、解 V を改めて \bar{V} とみて線形化を繰り返すとき、(10) が階数一定の境界行列をもつ極大非負境界条件問題となるかどうかがわからなくなってしまう。係数の特徴を生かして扱いよい線形化方程式を導くことができなくなるのである。このような不都合は適当な低階項 $B(\bar{V})V$ を付加し、(8) を拘束条件として復活させることによって解消される。付加すべき低階項の具体的な形については、Yanagisawa-Matsumura [8] を見られたい。そこで与えられた例は、写像 $(W_1, W_2) \mapsto B(W_1)W_2$ が変数 $x \in \bar{\Omega}$ に滑らかに依存する \mathbf{R}^7 上の歪対称双線形作用素となるようなものである。このことから、明らかに (10) は非線形問題 (9) の線形化問題になる。さらに、 $\partial_t^j \bar{V}|_{t=0} = \partial_t^j U|_{t=0}$, $j = 0, \dots, m-1$, を満たすように \bar{V} を選べば、非線形問題 (9) のデータの $m-1$ 次整合性から線形化問題 (10) のデータの $m-1$ 次整合性がしたがう。ここに、 $\partial_t^j U|_{t=0}$ は、 $U|_{t=0} = U_0$, $j \geq 1$ のとき、方程式 (9) を形式的に t で $j-1$ 階微分して得られる“偏導関数”を $t=0$ に制限した表現において時間微分を低階のものから順次、 U_0 の空間変数に関する偏導関数で置き換えてゆくことで得られる関数である： $\partial_t U|_{t=0} = -A_0(U_0)^{-1} \sum_{j=1}^3 A_j(U_0) \partial_j U_0, \dots$

4. Result. まず、関数空間の設定を行う。とくに断らない限り、スカラー値関数空間、ベクトル値関数空間を記法上、区別しないものとする。はじめのふたつの空間はよく知られたものである。

$H^s(\Omega)$ ($s \geq 0$) : Sobolev-Slobodeckii space,

$H_{\tan}^j(\Omega)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) :

$$= \{f \in L^2(\Omega); \Lambda_1 \cdots \Lambda_k f \in L^2(\Omega)$$

for any k tangential vector fields $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, k = 1, \dots, j\}$.

これらの空間を用いて、重みつき Sobolev 空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, をつぎで定める：

$$\tilde{H}^j(\Omega) := H^{\frac{j}{2}}(\Omega) \cap H_{\tan}^j(\Omega).$$

関数の境界条件を表現するために、 \mathbf{R}^7 値関数空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$ の部分空間 $\tilde{H}_B^j(\Omega)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, をつぎのように導入する：

$$\tilde{H}_B^0(\Omega) = \tilde{H}^0(\Omega),$$

$$\tilde{H}_B^1(\Omega) = \{^t(p, u, H) \in \tilde{H}^1(\Omega); d^{-1/2}(u \cdot \nu) \in L^2(\Omega)\},$$

$$\tilde{H}_B^j(\Omega) = \{^t(p, u, H) \in \tilde{H}^j(\Omega); u \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad j = 2, 3, \dots$$

ここに、 $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ であり、 ν は境界 $\partial\Omega$ の近傍で $\nu(x) = -\nabla d(x)$ を満たす C^∞ ベクトル場である。関数空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$ の埋め込みに関する一事実をあげておく：

$$\tilde{H}^j(\Omega) \subset C^{[(j-3)/2]}(\bar{\Omega}), \quad j = 3, 4, \dots \quad (12)$$

本講演で紹介する結果は、関数空間

$$\bigcap_{j=0}^m C^j([0, T]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega)), \quad m : \text{integer} \quad (13)$$

に属する (9) の解に関するものである。つぎの仮定をおく。

- (i) m は 7 以上の整数である;
- (ii) 初期値 $U_0 = {}^t(p_0, u_0, H_0)$ は, $\tilde{H}^m(\Omega) (\subset C^2(\bar{\Omega}))$, 仮定 (i) と (12) による) に属し,

$$\begin{aligned} p_0(x) &> 0 \quad \text{on } \bar{\Omega}, & (\text{圧力の正値性}) \\ \partial_t^j U|_{t=0} &\in \tilde{H}_B^{m-j}(\Omega), \quad j = 0, 1, \dots, m, & (\text{整合条件}) \\ H_0 \cdot n &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, & (\text{拘束条件}) \end{aligned}$$

を満たす。

仮定 (i), (ii) のもとで, (9) の可解性についてつぎのことがいえる:

定理. 正の定数 κ_0, K_0 が,

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} p_0(x) \geq \kappa_0, \quad \sum_{j=0}^m \|\partial_t^j U|_{t=0}; \tilde{H}_B^{m-j}(\Omega)\| \leq K_0$$

を満たすものとする。このとき, m, κ_0 および K_0 に (正確には領域 Ω にも) 依存して正の定数 T_0 が決まり, (9) は関数空間 $\bigcap_{j=0}^m C^j([0, T_0]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega))$ に属する解をもつ。

定理を補足しておく。まず, 埋め込み (12) により, $m \geq 7$ のとき,

$$\bigcap_{j=0}^m C^j([0, T]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega)) \subset C^2([0, T] \times \bar{\Omega})$$

である。したがって, 関数空間 (13) に属する (9) の任意の解 U は古典解である。また, 2 節で示したように, 拘束条件 (8) のもとで $[0, T] \times \partial\Omega$ において $H \cdot n = 0$ が成り立つ。このことから, 関数空間 (13) に属する (9) の解の一意性がしたがう。さらに, $\partial_t^j U|_{t=0} \in \tilde{H}_B^{m-j}(\Omega)$ も導かれる。これは, 拘束条件 (8) のもとで関数空間 (13) に属する解が存在するための条件として, データの整合条件 $\partial_t^j U|_{t=0} \in \tilde{H}_B^{m-j}(\Omega)$ が必然的に導かれることを示している。

本定理と既存の結果とを比較しておく。Yanagisawa-Matsumura [8] では本定理と同様の結果を得るために, m を 8 以上の整数とし, 初期値 U_0 が通常の Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ に属するものとしている。これは, Rauch-Massey [5] に習ってデータの滑らかさや整合性に近似操作を加えるためデータの一様な滑らかさが技術的に必要とされるからである。Secchi [6] は,

Yanagisawa-Matsumura の結果を手掛かりに、非線形問題 (9) の解の滑らかさを増すことで本定理と同様の結果を得ている。ただし、 m を $16 (= 2 \times 8)$ 以上の整数と仮定している。埋め込み $\tilde{H}^{2j}(\Omega) \subset H^j(\Omega)$ に利用するためである。詳しくいえば、これらの研究は、偶数 j にたいしては $\tilde{H}^j(\Omega)$ と同等な空間を用いているが、奇数 j にたいしては $\tilde{H}^j(\Omega)$ の代わりに、境界付近で法線方向の滑らかさの指数 $j/2$ (半整数) を整数 $(j-1)/2$ に減じて定義される関数空間を用いている。半整数階の滑らかさを考慮することなく相応の結果を導き出しているわけだが、補間空間論の立場からすれば、解の滑らかさに自然な記述を求めてしかるべきであろう。事実、次節で説明するように、半整数階の滑らかさを取り入れることにより、関数空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$ の補間空間としての性質が利用可能となり、非線形問題 (9) のデータの整合条件の取り扱いが単純となって、結果自体の改良につながるができるのである。

5. Technicalities. 定理の証明の方針は関数空間 (13) の適当な部分集合を定め、そこで非線形問題 (9) の線形化の反復を行うことである。反復が可能であることを示すには、重みつき Sobolev 空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$ についての性質 (関数積、合成関数の滑らかさ、微分作用素の働き等々) を調べ、これを用いて線形化方程式 (10) の強解の滑らかさや係数への依存のしかたを定量的に与えるなど、多くの準備が必要である。データの整合性と線形化方程式の解の滑らかさとの関連に関心が集まるが、これについては [10] に基本的な考えが示されている。このことにかんがみて、ここでは重みつき Sobolev 空間の補間空間としての性質をデータの整合性の取り扱いにどのように利用するか、この問題に話題を絞って説明を加えることにする。

非線形方程式 (9) を解くうえでデータの整合条件を生かすべき箇所のひとつは、線形化の関数の集合を適切に構成するところである。事情をはっきりさせるために、つぎの条件 (a)-(e) を満たす関数 $\bar{V} = {}^t(\bar{q}, \bar{v}, \bar{I})$ からなる $\bigcap_{j=0}^m C^j([0, T]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega))$ の部分集合 $A_T(L, M)$ を考える:

- (a) $\bar{v} \cdot n = \bar{I} \cdot n = 0$ on $[0, T] \times \partial\Omega$;
- (b) $\partial_t^j \bar{V}|_{t=0} = \partial_t^j U|_{t=0}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- (c) $\sup_{0 < t < T} \|\bar{V}(t) - \bar{V}(0); \tilde{H}^{m-1}(\Omega)\| \leq L$;
- (d) $\sum_{j=0}^m \sup_{0 < t < T} \|\partial_t^j \bar{V}(t); \tilde{H}^{m-j}(\Omega)\| \leq M$;
- (e) $\bar{q}(t, x) \geq \kappa_0/2$ on $[0, T] \times \bar{\Omega}$.

ここに、 T, L, M は正の定数である。集合 $A_T(L, M)$ から関数を選んで線形化方程式 (10) をつくる。条件 (b) により、(10) のデータの整合性は非線形問題 (9) のデータの整合条件から導き出されることに注意しよう。このことからまず、(10) が $\bigcap_{j=0}^m C^j([0, T]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega))$ に属する解をもつことがわかる。詳細は省略するが、線形化方程式の解を評価することにより、 L, M を適当に大きくとりこれに応じて T を十分小さく選べば、(10) の解が $A_T(L, M)$ に属することが示される。かくして、集合 $A_T(L, M)$ のなかで線形化の反復が可能になる。当然のことながら、以上の筋書きにおいて集合 $A_T(L, M)$ が空でないことが前提となっている。

集合 $A_T(L, M)$ が空でないことを保証するために、重みつき Sobolev 空間の補間空間とし

ての性質を利用して

$$\begin{aligned}\bar{v} \cdot n &= \bar{I} \cdot n = 0 && \text{on } [0, T] \times \partial\Omega, \\ \partial_t^j \bar{V}|_{t=0} &= \partial_t^j U|_{t=0}, && j = 0, 1, \dots, m,\end{aligned}$$

を満たす関数 $\bar{V} \in \bigcap_{j=0}^m C^j([0, T]; \tilde{H}^{m-j}(\Omega))$ を構成してみよう. $f_j = \partial_t^j U|_{t=0}$, $j = 0, 1, \dots, m$, とおく. 整合条件により, $f_j \in \tilde{H}_B^{m-j}(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, m$, である. これと, 拘束条件 $H_0 \cdot n = 0$ を用いれば, $f_j = {}^t(p_j, u_j, H_j)$ について,

$$H_j \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad j = 0, \dots, m-2, \quad d^{-1/2}(H_{m-1} \cdot \nu) \in L^2(\Omega)$$

が成り立つことが示される. したがって, 適当に成分分解して考えれば, つぎの事実を用いて所要の関数 \bar{V} を構成できることになる.

補題 1. 関数空間 $\tilde{H}_D^j(\Omega)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, を

$$\begin{aligned}\tilde{H}_D^0(\Omega) &= L^2(\Omega), \\ \tilde{H}_D^1(\Omega) &= \{f \in \tilde{H}^1(\Omega); d^{-1/2}f \in L^2(\Omega)\}, \\ \tilde{H}_D^j(\Omega) &= \{f \in \tilde{H}^j(\Omega); f = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad j = 2, 3, \dots,\end{aligned}$$

と定める. $n = 1, 2, \dots$, にたいして,

$$\begin{aligned}\left\{(\partial_t^n g|_{t=0}, \dots, g|_{t=0}); g \in \bigcap_{j=0}^n C^j([0, \infty); \tilde{H}^{n-j}(\Omega))\right\} &= \prod_{j=0}^n \tilde{H}^j(\Omega), \\ \left\{(\partial_t^n g|_{t=0}, \dots, g|_{t=0}); g \in \bigcap_{j=0}^n C^j([0, \infty); \tilde{H}_D^{n-j}(\Omega))\right\} &= \prod_{j=0}^n \tilde{H}_D^j(\Omega).\end{aligned}$$

補題 1 を証明するには, つぎの補題で重みつき Sobolev 空間 $\tilde{H}^j(\Omega)$, $\tilde{H}_D^j(\Omega)$ の補間空間の特徴付けて, [9] の結果をあてはめればよい:

補題 2. $n = 2, 3, \dots$, $j = 1, \dots, n-1$, のとき,

$$(L^2(\Omega), \tilde{H}^n(\Omega))_{j/n, 2} = \tilde{H}^j(\Omega), \quad (L^2(\Omega), \tilde{H}_D^n(\Omega))_{j/n, 2} = \tilde{H}_D^j(\Omega).$$

補題 2 の証明の方針はつぎのとおり. Grisvard [1] のアイデアに沿って考えれば, 半空間 $\{(x_1, x_2, x_3); x_3 > 0\}$ 上の関数に働く tangential differential operators $\partial_1, \partial_2, x_3 \partial_3$ と境界条件を伴わない differential operator ∂_3 (または 0 境界条件を伴う differential operator ∂_3) から生成される非等方的な Sobolev 空間の補間空間の特徴づけに問題を帰着させて補題 2 の主張を証明することができる. ここでの議論と, Grisvard の議論の違いは, レゾルベント可換でない作用素 $x_3 \partial_3, \partial_3$ の取り扱いである. 結論をいえば, 実補間空間の特徴づけに関する限り,

$x_3\partial_3$ の振る舞いは, 他の tangential operators ∂_1, ∂_2 と同じである. この性質は, 交換関係 $[\partial_3, x_3\partial_3] = \partial_3$ から導き出されるものであることを注意しておく.

REFERENCES

- [1] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Mech. Anal. **25** (1967), 40-63.
- [2] P. D. Lax and R. S. Phillips, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 427-455.
- [3] M. Ohno, Y. Shizuta and T. Yanagisawa, The initial boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), 143-210.
- [4] J. Rauch, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 167-187.
- [5] J. Rauch and F. Massey III, Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 303-318.
- [6] P. Secchi, Well-posedness for a mixed problem for the equations of ideal magneto-hydro-dynamics, Arch. Math. **64** (1995), 237-245.
- [7] P. Secchi, The initial boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplicity, Diff. & Int. Equations **9** (1996), 671-700.
- [8] T. Yanagisawa and A. Matsumura, The fixed boundary value problems for the equations of ideal magneto-hydrodynamics with a perfectly conducting wall condition, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 119-140.
- [9] Y. Yamamoto, Characterization of certain intermediate spaces related to functionals of Brézis and Fraenkel, Funkcialaj Ekvacioj **40** (1997), 123-138.
- [10] Y. Yamamoto, Regularity of solutions of initial boundary value problems for symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Stochastics (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol.48, World Scientific) (1998), 133-159.